

Le nombre au cycle 2

Document de synthèse suite aux animations pédagogiques de circonscription

Eléments d'histoire

1- Les différents systèmes de numération

Numération additive

Dans ce système de numération, l'addition est la seule opération utilisée.

La valeur d'un nombre est la somme des valeurs des symboles qui le composent.

Par exemple, dans la numération romaine, le I vaut "un" où qu'il se trouve dans l'écriture. La longueur de l'écriture du nombre est donc sans rapport avec sa valeur. (Ex : MI "mille un" et DCCCLXXXVIII "888").

Un problème évident se pose avec ce type de numération : comment écrire des nombres très grands ?

Numération hybride

Ces numérations utilisent conjointement l'addition et la multiplication.

Mais chaque puissance de la base est représentée par un symbole différent, ce qui rend évident la faiblesse de ce principe pour représenter des nombres très grands.

Exemple dans la vieille numération indienne (avant le 5ème siècle) :

$$789 \rightarrow 9 + 8 \times 10 + 7 \times 100$$

700 est conçu comme «sept» fois «cent» et représenté par «cent» suivi de «sept»

80 est conçu comme «huit» fois «dix» et représenté par «dix» suivi de «huit»

Numération de position

Procédé d'écriture des nombres dans lequel chaque position est reliée à la position voisine par un multiplicateur.

Le nombre de symboles nécessaires est au moins égal à la base ou à la plus grande base auxiliaire utilisée. Le système décimal usuel utilise 10 symboles.

La numération de position avec un zéro a été inventée en Inde au cours du 5e siècle.

Au fil du temps et des échanges, elle s'est ensuite propagée jusqu'à l'Occident chrétien.

2 - Apparition du zéro

Le zéro est une notion très ancienne : aujourd'hui on attribue son invention aux Babyloniens du IIIe siècle avant JC. La première fonction du zéro est de désigner le vide et de le marquer, tout simplement.

Chez les Grecs, le zéro avec sa connotation de néant, de non-existence, offensait l'esprit rationnel des Grecs. On suppose que le symbole pour zéro est issu de l'initiale de mot grec : rien. Dans les papyri les plus anciens, il revêt la forme d'un très petit cercle surmonté d'une longue barre.

Après le statut de simple marqueur (du vide, du rien), le zéro devient un chiffre. Cette transition est effectuée par les Indiens et est liée à l'invention de leur système décimal. Le zéro est symbolisé par un point ou un rond. Il fut considéré comme un chiffre à part entière (le 10e chiffre) et non plus seulement comme marqueur d'absence de dizaines, ou d'unités ... Il sera alors défini comme le résultat d'un nombre entier soustrait à lui-même (par le mathématicien indien Brahmagupta en 628), comme par exemple : $5 - 5 = 0$. Les propriétés du zéro sont alors définies.

Animation Mathématiques n° 2 Cycle 2 - 2010/2011

Origine du mot zéro

Sunya signifie **vide** en Sanscrit, c'est le nom que l'on retient pour la quantité nulle. Le zéro est représenté par un petit rond.

Au 9^e siècle, **les Arabes** emprunteront aux Indiens le zéro. Traduit en arabe, sunya devient **Sifr**. Ce ne sera finalement qu'au 12^e siècle que le zéro arrivera **en Occident**. Traduit en italien, sifr donna **zéfirum** que l'on utilisera jusqu'au 15^e siècle. Après quelques modifications le mot deviendra **zefiro** qui donnera **zéro** à la fin du 15^e siècle (1491).

3 - Origine de nos chiffres

C'est dans le nord de l'Inde aux environs du 5^{ème} siècle de notre ère qu'est né l'ancêtre de notre système de numération. En effet, notre expression chiffres arabes est trompeuse au niveau historique. S'il est certain que nous devons aux Arabes la connaissance de ce système de numération, eux-mêmes l'avaient repris aux Indiens.

Les arabes et les indiens ont un système de numérotation très proche. On sait qu'il y avait des contacts commerciaux et intellectuels entre les deux civilisations, qui ont permis aux arabes d'utiliser la notation indienne, qu'ils ont transformée. Ainsi, en langue arabe, les chiffres s'appellent indiens, « hindis », tandis qu'en langue française on les nomme « arabes ».

Les chiffres arabes sont à l'origine des chiffres utilisés maintenant ; cependant il faut faire une distinction entre les chiffres arabes occidentaux et orientaux. Nos chiffres actuels proviennent des chiffres arabes occidentaux, dits « ghubâr » (Maghreb, Péninsule ibérique). Les chiffres des orientaux, dits « hindis », sont tirés directement de la notation indienne, avec cependant des modifications graphiques relativement importantes sur certains chiffres.

Du mot Sifr, le vide, que les arabes avaient donné au Sunya, d'origine indienne, dérive également le mot chiffre, qui est devenu, depuis à peine 500 ans, la dénomination sous laquelle la plupart des langues occidentales désignent l'un des quelconques signes de base d'un système de numération écrite.

L'orthographe du terme français de *cifre* se transforma dans un premier stade en *chifre* pour aboutir finalement à *chiffre*. Mais au début du 15^e siècle, ce dernier mot était encore compris dans son acception originelle, celle de la quantité nulle, et ce n'est qu'à partir de 1491 qu'il acquerra définitivement le sens que nous lui connaissons maintenant.

Programmes 2008 et continuité des apprentissages

Au cycle 2, 180 heures annuelles sont consacrées aux mathématiques, soit environ 5 heures par semaine. Les programmes précisent que l'apprentissage des mathématiques développe l'imagination, la rigueur et la précision ainsi que le goût du raisonnement. **La connaissance des nombres et le calcul constituent les objectifs prioritaires du CP et du CE1.**

Conjointement une pratique régulière du calcul mental est indispensable.

Les séances consacrées au calcul mental gagnent dans leur efficacité à être ritualisées et déconnectées des autres apprentissages mathématiques puisqu'il s'agit de construire des automatismes. De premiers automatismes s'installent. L'acquisition des mécanismes en mathématiques est toujours associée à une intelligence de leur signification.

1 - Le concept de nombre

Simple : le nombre a été introduit pour résoudre des problèmes liés à la mémorisation et la conservation des quantités

Animation Mathématiques n° 2 Cycle 2 - 2010/2011

Et complexe car :

- Le nombre a plusieurs représentations
 - Forme imagée
 - Forme verbale
 - Forme écrite
- Les nombres sont liés entre eux
- Le nombre a 2 aspects : cardinal et ordinal

2 - Continuité des apprentissages

Des capacités travaillées dès la maternelle :

- l'acquisition de la chaîne numérique
- la découverte des fonctions du nombre : mémoriser - comparer - partager - calculer
- la maîtrise du dénombrement: par énumération, par correspondance terme à terme, par groupement
 - Ce qui permet aux élèves de maternelle d'aborder : l'aspect cardinal du nombre, l'aspect ordinal, l'aspect algorithmique et la distinction valeur et quantité.

Une première difficulté : le passage au symbolique

L'utilisation d'un ou plusieurs codes, le passage d'un code à l'autre et la manipulation des nombres transcrits en chiffres posent longtemps des problèmes.

Une deuxième difficulté a trait au passage des transformations (analogiques) aux opérations (symboliques). Le fait que les enfants perçoivent et comprennent très précocement et facilement les effets des transformations affectant la quantité (ajout, retrait, partage...) laisse souvent penser à tort qu'ils maîtrisent ou au moins comprennent les opérations (addition, soustraction, multiplication, division...).

Cette surestimation des capacités des enfants est d'autant plus vraie lorsque lesdites opérations ne font que simuler le déroulement des transformations : si Paul a 3 billes et que je lui en donne 4, le fait de transcrire $3 + 4 = 7$ n'assure en rien que l'addition est acquise. (cf. *Le nombre au cycle 2 p 9*)

Construction des compétences numériques au cycle 2

Des passages incontournables :

- Les situations abordant le point de vue algorithmique
- Les situations abordant le point de vue sémantique : groupements, échanges
- Le calcul mental

1 - Les situations abordant le point de vue algorithmique

Toutes les activités autour des compteurs (avec des chiffres ou avec des mots) et des calculatrices entrent dans cette catégorie en liaison avec l'utilisation des abaques.

Il s'agit d'un travail autour des familles de nombres comme dans la situation du " jeu du château " en CP / CE1 (cf. *ERMEL*), ou autour de la spirale des nombres. La structuration des nombres est également en jeu dans les situations utilisant la droite numérique (Cf. *JDI n° 10 de juin 2007 - dossier « Utiliser les données numériques - Cycle 2 »*).

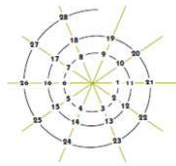
Le système écrit du point de vue algorithmique

Des outils

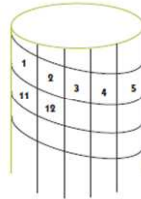


File numérique

Tableau



Spirale



Rouleau en spirale



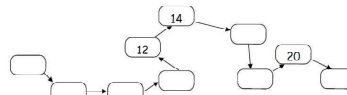
Compteurs



File numérique : le jeu du furet



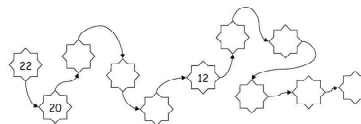
Situation simple
la règle est donnée



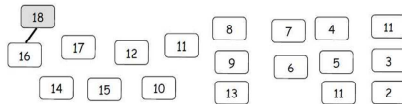
Pas de départ identifié,
indices chiffrés pour trouver la règle



Pas de départ identifié,
règle à trouver par représentation mentale



Départ identifié,
indices chiffrés pour trouver la règle,
ordre décroissant.



Départ identifié,
indices chiffrés pour trouver la règle,
ordre décroissant, nombres intrus



Le jeu du château

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	●	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

- Utiliser le prédécesseur et/ou le successeur

- Utiliser le principe du tableau à double entrée

- Utiliser le nombre situé dans la ligne du dessus et dans celle du dessous



2 - Les situations abordant le point de vue sémantique

2 types d'activités à mener

Dénombrement (groupements)

Recherche de la valeur (échanges)

Des outils

- bâtonnets et élastiques
- cubes emboîtables
- ...



Exemple en classe
Le fourmillon

Des outils

- matériel multi-base
- boulier chinois
- abaques
- ...

Les situations de groupements

Pour les CP, il s'agira de construire des stratégies pour dénombrer rapidement et de manière fiable des collections de 60 à 100 objets et au CE de plusieurs centaines voire milliers d'objets. Ces situations amènent à constater que l'utilisation des paquets de dix (notons que le nombre dix relève ici d'une convention imposée par notre système de numération) puis des paquets de paquets va faciliter la détermination de l'écriture du cardinal qui pourra être d'abord traduit sous la forme d'une écriture additive. L'évolution du CP au CM2 se fait au niveau du passage de collections réelles à des collections représentées sous différentes formes.

Les situations d'échange pour travailler l'écriture chiffrée du nombre

Si ces situations participent de la construction du nombre, l'objectif porte davantage sur les écritures et les désignations des nombres que sur les calculs sur ces nombres.

Ces situations sont incontournables au cycle 2. Elles permettent d'explorer les règles d'échanges qui justifient le système de numération de position : un même chiffre selon sa position désigne des quantités différentes ou des quantités identiques mais correspondant à des ordres différents.

Au cycle 2 ce sont en particulier les situations de type " jeu du banquier ", "boulier chinois", "abaque" ... L'évolution se traduit au niveau de la règle d'échanges (un contre cinq, puis rapidement un contre dix). Elles se préparent et s'enrichissent avec tout le travail sur la monnaie.

L
E
N
O
M
B
R
E

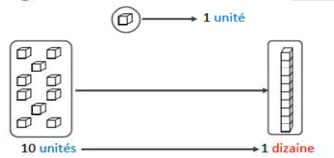
Echanges : le jeu du banquier



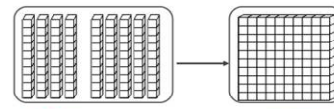
Matériel base 10



Monnaie



10 unités = 1 dizaine ou 10 u = 1 d



10 dizaines = 1 centaine ou 10 d = 1 c

ou

100 unités = 1 centaine ou 100 u = 1 c

Fiche de synthèse

Léa a joué au jeu du banquier.

Cartons tirés	Dessine les unités, les dizaines ou les centaines demandées au banquier.
1 ^{er} tirage	
2 ^e tirage	
3 ^e tirage	

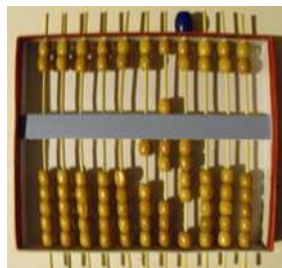
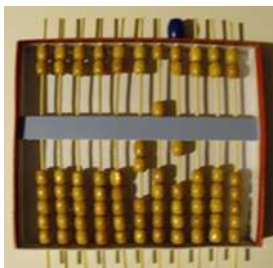
Grille pour le réinvestissement



L
E
N
O
M
B
R
E

L'aspect « échanges »

Donner du sens aux chiffres en fonction de leur position



Le boulier chinois



L'abaque



Le calcul mental

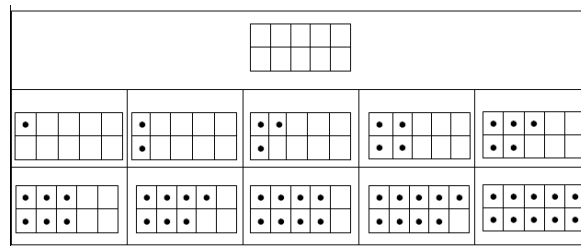
On peut être tenté d’opposer le calcul mental au calcul écrit ou instrumenté. Mais parler de calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écrire. Ce qu’on désigne sous le terme de calcul écrit (“l’opération posée”) requiert la connaissance des tables et la gestion des retenues, donc du calcul mental. Il ne dispense donc pas de calculer mentalement, bien au contraire. Le déficit de maîtrise du calcul mental fragilise gravement l’apprentissage des techniques écrites.

Un outil : les cartes à points

Un rôle d’aide pour la mise en évidence des propriétés du nombre : notamment les relations arithmétiques : doubles et moitiés - complément à 10 -

Un rôle d’aide à la mise en place des procédures de calculs en même temps que la construction de la numération des entiers.

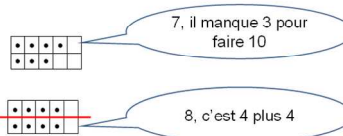
Utilisation des cartes à points dans les procédures de calcul ; principe de la table à compter : Le système de table à compter permet de réaliser des calculs additifs en s’appuyant sur les propriétés de la numération décimale.



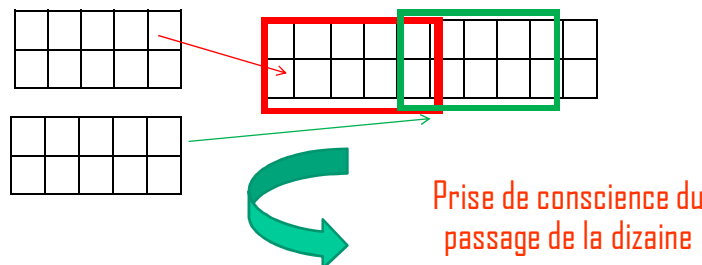
L
E
N
O
M
B
R
E

Les cartes à points

- Un outil pour mettre en évidence les propriétés des nombres



- Un outil pour mettre en place des procédures de calcul



Animation Mathématiques n° 2

Cycle 2 - 2010/2011

Socle commun et validation du palier 1

Compétence 3 - Les principaux éléments de mathématiques :

L'élève est capable de :

- écrire nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels inférieurs à 1 000
- calculer : addition, soustraction, multiplication
- diviser par 2 et par 5 des nombres entiers inférieurs à 100 (dans le cas où le quotient exact est entier)
- restituer et utiliser les tables d'addition et de multiplication par 2, 3, 4 et 5
- calculer mentalement en utilisant des additions, des soustractions et des multiplications simples
- résoudre des problèmes très simples

Grilles de références pour l'évaluation et la validation des compétences palier 1

<http://eduscol.education.fr/pid23228-cid53126/grilles-de-references-socle-commun.html>

Nombres et calcul		
Items	Explication des Items	Indications pour l'évaluation
Écrire, nommer, comparer, ranger les nombres entiers naturels inférieurs à 1000	<ul style="list-style-type: none">- Connaître (écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 1000.- Savoir ou dire des suites de nombres de 10 en 10, de 100 en 100, etc.- Repérer et placer ces nombres sur une échelle graduée, les comparer, les ranger, les encadrer.	<p>L'évaluation est réalisée :</p> <ul style="list-style-type: none">- à l'oral, en lecture et en production ;- à l'écrit, dans de courts exercices dédiés. <p>Les suites de nombres¹ demandées partent de n'importe quel nombre ; elles peuvent être décroissantes.</p> <p>Évaluer aussi :</p> <ul style="list-style-type: none">- le cas particulier du successeur (le nombre qui suit) et du prédécesseur (le nombre qui précède) ;- l'encadrement d'un entier entre deux dizaines ou deux centaines consécutives ;- la production de suites de 2 en 3, de 50 en 50, etc.
Résoudre des problèmes de dénombrement	Résoudre des problèmes de dénombrement sur des collections, en utilisant des groupements.	<p>L'évaluation est réalisée :</p> <ul style="list-style-type: none">- à l'écrit ou à l'oral ;- lors d'activités de manipulations. <p>L'évaluation consiste en des demandes de dénombrement ou de réalisation de collections d'un cardinal donné. Préparer des cardinaux suffisamment grands (>100) pour que la mise en place de stratégies de groupements s'avère nécessaire (ex. supports en 100 jetons).</p>
Calculer : addition, soustraction, multiplication	<ul style="list-style-type: none">- Calculer en lignes des suites d'opérations.- Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 1000).- Connaître une technique opératoire de la multiplication et l'utiliser pour effectuer des multiplications par un nombre à un chiffre.	<p>Le calcul en ligne est évalué à l'écrit mais aussi à l'oral lors des temps de calcul mental (l'opération peut être notée au tableau par l'enseignant).</p> <p>L'évaluation des techniques opératoires est réalisée principalement à l'écrit dans des exercices dédiés ou à l'occasion de la résolution d'un problème.</p> <p>L'évaluation porte sur la capacité à :</p> <ul style="list-style-type: none">- effectuer des opérations posées ;- poser et effectuer correctement des opérations. <p>Les multiplications proposées mobilisent les tables de 2, 3, 4 et 5 (Ex : 28 x 4 mais aussi 24 x 8). Les suites d'opérations en ligne ne comportent pas de parenthèses. L'évaluation porte aussi sur des opérations avec retenues.</p>

¹ Les nombres sont écrits en chiffres ou en lettres (avec les tolérances apportées par l'Académie Française dans les règles de l'orthographe rectifiée – J.O. du 5 décembre 1990).

Bibliographie / Sitographie

- Eduscol : Le nombre au cycle 2

http://media.eduscol.education.fr/file/ecole/00/3/Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf

- Grilles de références pour l'évaluation et la validation des compétences palier 1

<http://eduscol.education.fr/pid23228-cid53126/grilles-de-references-socle-commun.html>

- Une proposition de progression en calcul mental avec une liste d'activités type, le plus souvent sous une forme ludique

http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/1207815989703/0/fiche_ressourcepedagogique/#KLINK

- Une proposition de progression en calcul mental

http://netia59a.ac-lille.fr/douaiwaziers/calcul_mental/c2.htm

- Activités et supports pour le calcul mental :

<http://www.pmev.fr/articles.php?lng=fr&pg=4148> (Dominique Verdenne)

<http://circ36-issoudun.tice.ac-orleans-tours.fr/php5/articles.php?lng=fr&pg=107#Retour>

- Sites de jeux :

<http://netia59a.ac-lille.fr/calculatrice/>

<http://matoumatheux.ac-rennes.fr/accueil.htm>

<http://www.ac-caen.fr/ia50/circo/mor/spip.php?article64>