ACADÉMIE
D'ORLÉANS-TOURS

Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques 2023

Corrigés des trois exercices académiques

Exercice académique n° 1 - Robot aspirateur [commun]

Exercice académique n° 2 - Antenne parabolique [spécialistes]

Exercice académique n° 3 - Code de Hamming [non spécialistes]

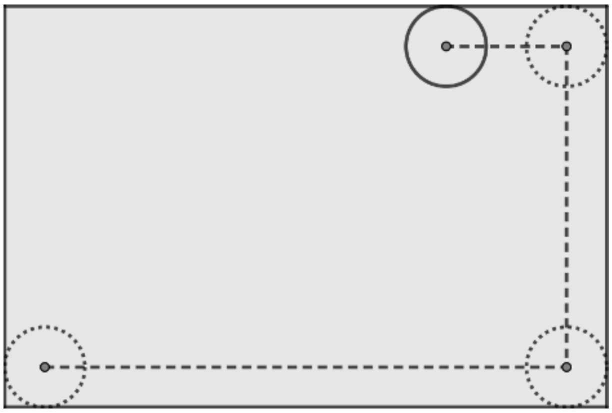
*Les candidats traitent **deux exercices** par groupes de deux ou de trois :*

- *Les candidats **suivant** l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros **1** et **2**.*
- *Les candidats **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série générale traitent les exercices numéros **1** et **3**.*

Tous les élèves d'un même groupe doivent noter leur numéro d'anonymat sur la copie commune.

ROBOT ASPIRATEUR : éléments de correction

A - Un tour de piste.



1. Dans cette question : $R = 20$, $a = 200$ et $b = 300$.
   (a) Figure à l'échelle 1 : 20 du parcours de l'aspirateur : Rectangle de 10 cm sur 15 cm, aspirateur figuré par un disque de rayon 1 cm.
   (b) Aire la surface aspirée après un tour de la pièce :
   $\mathscr{A} = 300 \times 200 - 220 \times 120 - (40^2 - \pi \times 20^2) = 32\,000 + 400\pi \approx 33\,257$ cm.
2. Aire $\mathscr{A}$ de la surface aspirée. On l'obtient comme l'aire de la couronne amputée des quatre coins non aspirés ; voici deux façons d'obtenir le résultat :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= ab - (a-4R)(b-4R) - (4R^2 - \pi \times R^2)\\ &= 4R(a+b) - 20R^2 + \pi \times R^2\\ &= 2R \times P - (20-\pi)R^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= 2\left((a-2R) + (b-2R)\right) \times 2R - (4R^2 - \pi \times R^2)\\ &= 4R(a+b) - 20R^2 + \pi \times R^2\\ &= 2R \times P - (20-\pi)R^2\end{aligned}$$

   où $P = 2(a+b)$.
3. Calcul du coefficient c d'aspiration.
   La surface $\mathscr{S}$ à aspirer vaut :

$$\mathscr{S} = ab - (a-4R)(b-4R) = 4R(a+b) - 16R^2 = 2RP - 16R^2$$

   Le coefficient d'aspiration est le quotient de $\mathscr{A}$ par $\mathscr{S}$:

$$c = \frac{\mathscr{A}}{\mathscr{S}} = \frac{2R \times P - (20-\pi)R^2}{2RP - 16R^2}$$

   On factorise numérateur et dénominateur par $2R$ puis on simplifie. Il vient :

$$c = \frac{2R \times \left(P - \left(10 - \frac{\pi}{2}\right)R\right)}{2R(P-8R)}$$

   en factorisant par 2 la parenthèse du numérateur, on obtient :

$$\frac{P - 2R\left(5 - \frac{\pi}{4}\right)}{P - 8R}$$

B - Deux parcours de la pièce.

Dans toute la suite de l'exercice, on reprend les conditions $R = 20$, $a = 200$, $b = 300$.

1. Les deux parcours permettent d'aspirer la même surface : celle de la pièce amputée de douze petits morceaux soit (en cm ^{2}) :

$$ab - 3 \times (4R^2 - \pi R^2) = 60\,000 - 3(1\,600 - 400\pi) \approx 58\,970$$

2. Le coefficient d'aspiration défini à la question A3 est donné par le quotient de l'aire aspirée calculée à la question précédente par 60 000 (l'aire de la pièce) :

$$c = \frac{60\,000 - 3(1\,600 - 400\pi)}{60\,000} = 1 - \frac{4-\pi}{50} \approx 98,28\%$$

3. Pour chacun de ces parcours, déterminer la distance parcourue par le centre de l'aspirateur.
   • Distance (en cm) parcourue par le centre de l'aspirateur pour le parcours en zig-zag :

$$5 \times (300 - 2R) + (200 - 2R) = 1\,700 - 12 \times 20 = 1\,460$$

   • Distance (en cm) parcourue par le centre de l'aspirateur pour le parcours en spirale :

$$(300-2R)+(200-2R)+(300-2R)+(200-4R)+(300-4R)+(200-6R)+(300-6R)+(200-8R)+(300-8R)$$

   soit

$$1\,500 + 800 - 42 \times 20 = 1\,460$$

   La distance parcourue par le centre de l'aspirateur est la même.

4. • Calcul du coefficient d'aspiration maximal :
   Seuls les quatre coins de la pièce ne pourront jamais être aspirés en raison de la rotondité de l'aspirateur, ce qui correspond à une surface non aspirée de $4R^2 - \pi R^2 = (4-\pi)R^2 = 400(4-\pi)$.
   Le coefficient d'aspiration maximal est donc $1 - \dfrac{400(4-\pi)}{60\,000} = 1 - \frac{1}{150}(4-\pi)$ soit environ 99,43%

   • Proposition d'un parcours d'aspiration qui réalise le coefficient maximal :
   on fait le parcours en zig-zag puis refait le tour de la pièce en longeant les quatre murs.

Éléments de correction de l'exercice académique N°2
Antenne parabolique

1. a. Comme M est le point d'abscisse a de la parabole alors son ordonnée est a^2.

$$MF = \sqrt{(x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + \left(\frac{1}{4} - 1\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

b. $$MH = \sqrt{(x_H - x_M)^2 + (y_H - y_M)^2} = \sqrt{(a-a)^2 + \left(-\frac{1}{4} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

On a donc bien $MF = MH$.

c. L'équation de la tangente à la parabole au point d'abscisse 1 est :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Comme pour tout réel x, $f(x) = x^2$ alors $f'(x) = 2x$ et donc $f'(1) = 2$.

L'équation de la tangente est donc :

$$y = 2(x-1) + 1^2 \text{ c'est à dire } y = 2x - 1.$$

Comme $A(0\,;-1)$ alors $2x_A - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1 = y_A$.

Donc A appartient bien à la tangente à la parabole au point d'abscisse 1.

d. **Vérifions que $AH = AF$.**

$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(-\frac{1}{4} - (-1)\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

$$AF = \sqrt{(x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2} = \sqrt{(0-0)^2 + \left(\frac{1}{4} - (-1)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}.$$

On a donc bien que $AH = AF$.

Montrons que la tangente à la parabole est la médiatrice de $[FH]$.

Comme $AH = AF$ et $MH = MF$ alors A et M appartiennent à la médiatrice de $[FH]$.
La médiatrice de $[FH]$ est donc la droite (AM) qui est aussi la tangente à la parabole au point d'abscisse M car A (d'après c.) et M(point d'application) appartiennent à la tangente.

2. a. $MH = MF \Leftrightarrow MH^2 = MF^2$

$$MH^2 = (a-a)^2 + \left(-\frac{1}{4} - a^2\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + a^2\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}a^2 + a^4$$

$$MF^2 = (0-a)^2 + \left(\frac{1}{4} - a^2\right)^2 = a^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}a^2 + a^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}a^2 + a^4$$

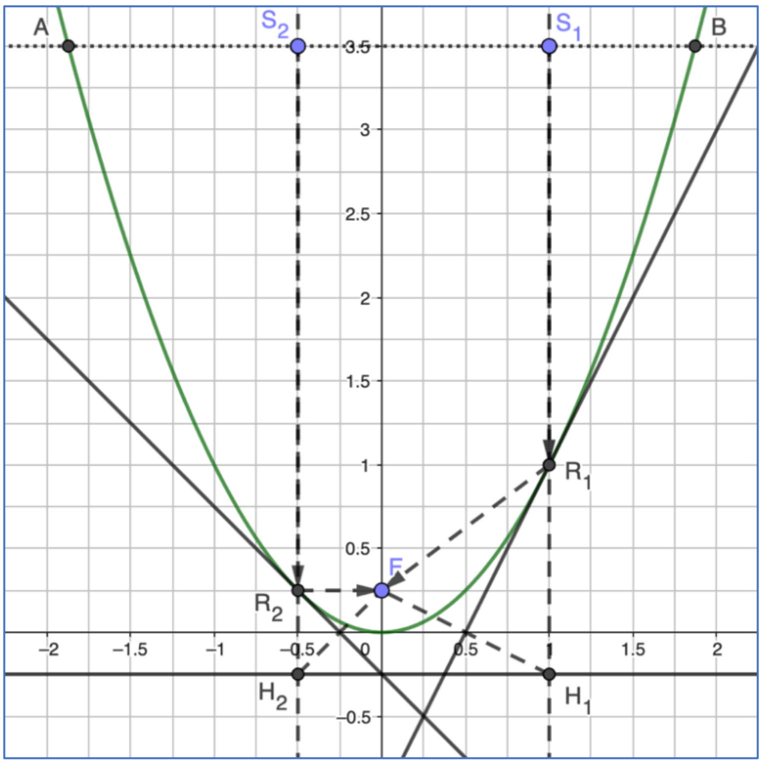
On a donc bien $MH^2 = MF^2$ et donc $MH = MF$.

b. Comme $MH = MF$ alors M appartient à la médiatrice de $[FH]$.
D'après la question 1.c) A appartient à la médiatrice de $[FH]$.
En utilisant les mêmes arguments qu'à la question 1.d), on a que la tangente à la parabole au point Mest la médiatrice de $[FH]$.

3. **Montrons que $\boldsymbol{MK = MH = MF}$.**
Comme K est le symétrique de H par rapport à M alors $MK = MH$.
Comme $MH = MF$ d'après la question 2.a), alors $MK = MH = MF$.
On en déduit donc que les points K, H et F appartiennent au même cercle de centre M.

Montrons que $\boldsymbol{\widehat{FMA} = \widehat{BMK}}$.
Comme $MF = MH$, alors FMH est un triangle isocèle, la médiatrice de $[FH]$ est également la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH}$.
D'après la question 2.b), la médiatrice de $[FH]$ est la tangente à la parabole au point d'abscisse M. Cette tangente est donc également la bissectrice de l'angle $\widehat{FMH}$ ce qui prouve que $\widehat{FMA} = \widehat{AMH}$.
De plus, comme les angles $\widehat{AMH}$ et $\widehat{BMK}$ sont opposés par le sommet alors $\widehat{AMH} = \widehat{BMK}$.
On a donc $\widehat{FMA} = \widehat{AMH} = \widehat{BMK}$ ce qui prouve l'égalité $\widehat{FMA} = \widehat{BMK}$.

4. a. Exemple de construction pour le point S_1.
On trace la perpendiculaire à la droite d'équation $y = -0{,}5$ passant par le point S_1.
On note R_1 et H_1 les points d'intersection respectifs avec la courbe et la droite $y = -0{,}5$
On trace la tangente à la courbe au point R_1.
On trace ensuite le symétrique de H_1 par rapport à la tangente.



b. D'après la question 3., le symétrique du point H par rapport à la tangente à la courbe est le point F. On en déduit donc que le rayon réfléchi arrivera bien au point F.

Reste à montrer que $\boldsymbol{SR + RF}$ est constante.
D'après la question 3., $RH = RF$ donc :

$$SR + RF = SR + RH = SH \text{ car les points } S, R \text{ et } H \text{ sont alignés.}$$

Or SH ne dépend pas de la position du point S car S et H ont la même abscisse.

On a donc bien que $SR + RF$ est constante.

Prolongement, on peut également démontrer cette propriété d'un point de vue algébrique.

Notons $S(x_S; y_S)$ et $R(x_R; y_R)$.
Comme R est un point de la parabole alors $y_R = x_R{}^2$.
De plus $x_R = x_S$ donc $R(x_S; x_S{}^2)$.

$SR = \sqrt{(x_S - x_S)^2 + (x_S{}^2 - y_S)^2} = \sqrt{(x_S{}^2 - y_S)^2} = |x_S{}^2 - y_s| = y_s - x_S{}^2$ car $y_s \geq x_s{}^2$

$$RF = \sqrt{(0 - x_S)^2 - \left(\frac{1}{4} - x_S{}^2\right)^2} = \sqrt{x_S{}^2 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2}x_S{}^2 + (x_S{}^2)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}x_S{}^2 + (x_S{}^2)^2}$$

En factorisant, on obtient $RF = \sqrt{\left(\frac{1}{4} + x_S{}^2\right)^2} = \frac{1}{4} + x_S{}^2$ car $y_s + x_s{}^2 \geq 0$

Par conséquent, $SR + RF = y_s - x_S{}^2 + \frac{1}{4} + x_S{}^2 = y_s + \frac{1}{4}$.

Comme y_s ne dépend pas de la position du point S, alors $SR + RF$ est bien constant.

5. a. Les antennes satellites ont une forme paraboloïde car cette forme permet aux rayons incidents (ondes reçues du satellite) de converger vers le foyer de la parabole.

   b. L'orientation de la parabole permet de recevoir les ondes des satellites (qui sont géostationnaires) parallèlement à l'axe de la parabole et le récepteur est placé au niveau du foyer de la parabole.

Prolongement : Quel est l'intérêt d'avoir $SR + RF$ constant ?

Le fait d'avoir $SR + RF$ permet de garantir que toutes les ondes qui arrivent sur la parabole mettront le même temps pour atteindre le foyer. Cela évite les interférences entre les différentes ondes reçues.

Exercice académique n° 3 - Code de Hamming [non spécialistes]

PARTIE A

1. En ne conservant que le bit le plus fréquent, il apparaît que le message reçu par Hedy est [1 0 1 0 0 1 0 1].

2. Il suffit que chaque bit correct apparaisse dans au moins deux copies :

   [1 1 0 1 0 1 0 1]
   [0 1 1 1 0 1 1 1]
   [0 1 0 1 1 1 0 1]

3. Non, l’envoi de trois messages tous altérés en même position ne permet pas de retrouver le message originel.
   Si les copies reçues avaient été :

   [0 1 0 1 0 1 1 0]
   [0 1 0 1 0 1 1 1]
   [0 1 0 1 0 1 0 1]

   le message originel n’aurait pas pu être retransmis.

PARTIE B

1. Les bits de contrôle sont respectivement 0 , 1 et 1 pour les messages proposés au vu du nombre pair ou impair de 1 dans le message transmis.
2. Le message a été altéré puisque les 7 premiers bits comportent six 1 : le bit de contrôle aurait dû être 0.
3. Le message a, soit été non altéré, soit comporte un nombre pair d’altérations (2, 4 ou 6). On ne peut pas le savoir.
4. Le bit de contrôle indique qu’il y a eu un nombre pair de bits égaux à 1 transmis. Il en figure déjà 3, il doit donc y en avoir un et qu’un seul parmi les deux bits inconnus.
   Les messages peuvent être [1010011 0] ou [1000111 0]

PARTIE C

1. Les colonnes 2 et 4 du tableau (hors bits de correction) comportent trois 1, le bit de contrôle 1 est donc 1.

   Les colonnes 3 et 4 du tableau (hors bits de correction) comportent trois 1, le bit de contrôle 2 est donc 1.

   Les lignes 2 et 4 du tableau (hors bits de correction) comportent trois 1, le bit de contrôle 4 est donc 1.

   Les lignes 3 et 4 du tableau (hors bits de correction) comportent deux 1, le bit de contrôle 8 est donc 0.

2. Le tableau transmis est :

	1	**1**	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	0	1	1

3. Les bits de correction 1 et 2 sont incohérents avec le corps du tableau, ce qui permet de suspecter une erreur dans les bits communs (ceux de la colonne 4).
   De même, les bits de correction 4 et 8 sont incohérents avec le corps du tableau, ce qui permet de suspecter une erreur dans les bits communs (ceux de la ligne 4).
   Comme il y a au maximum une seule erreur, elle est dans le bit 15, commun à la ligne 4 et à la colonne 4

   Le message originel devait être [1 0 1 0 1 1 0 0 1 1 **1**].

4. Seul un bit de correction (celui en position 2) présente une incohérence, ce qui montre que c'est lui qui comporte l'erreur et non le message, lequel est bien [1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1].

5. Le bit de correction 1 indique que a et c ont même parité.
   Le bit de correction 2 indique que a et b ont même parité.
   Le bit de correction 4 indique que b et c ont même parité.
   Le bit de correction 8 indique que c vaut 1, donc b et a aussi.

   Conclusion :

   a = b = c = 1

6 a) Avec trois erreurs indétectables :
3 erreurs indétectables, donc les bits de correction sont corrects.
Les bits 1 et 2 de correction ont en commun la colonne 4, les bits 4 et 8 de correction la ligne 4.
Donc les erreurs indétectables sont sur les bit 3, 12 et 15

	1	**1**	0
1	1	1	0
0	0	1	0
1	1	0	1

6. b) Avec quatre erreurs indétectables :

	0	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0

c) Il n’est pas possible qu’un message comporte exactement deux erreurs indétectables.
En effet, si cela était possible, il n’y aurait que trois cas de figure envisageables :

- les deux erreurs sont dans le message transmis ;
- les deux erreurs sont dans les bits de correction ;
- une erreur s’est glissée dans le message transmis et l’autre dans les bits de correction.

Les cases 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 et 12 impactent deux bits de correction et les autres cases affectées au bits du message transmis en impactent trois.

Voilà le tableau d’impact entre les bits et les bits de correction :

	1	2	1-2	
4	1-4	2-4	1 - 2 - 4	
8	1-8	2-8	1 - 2 - 8	
4 - 8	1 - 4 - 8	2 - 4 - 8	1 - 2 - 4 - 8	

Ainsi, si la case 5 contient une erreur, pour que celle-ci ne soit pas détectée par les bits de correction 1 et 4 qu’elle impacte, il faut que les cases 3 et 6 comportent également une erreur, ou bien – de façon symétrique, les cases 9 et 12.

	1	2	1-2
4	1-4	2-4	1 - 2 - 4
8	1-8	2-8	1 - 2 - 8
4 - 8	1 - 4 - 8	2 - 4 - 8	1 - 2 - 4 - 8
	1	2	1-2
4	1-4	2-4	1 - 2 - 4
8	1-8	2-8	1 - 2 - 8
4 - 8	1 - 4 - 8	2 - 4 - 8	1 - 2 - 4 - 8

Ce même principe indique que les cases 3 ; 9 et 10 d'une part et 6, 10 et 12 d'autre part doivent comporter simultanément une erreur pour ne pas être détectée.

Si la case 7 comporte une erreur, elle est indétectable que si les cases 11, 13, 14 et 15 en comporte aussi.

	1	2	1-2
4	1-4	2-4	1 - 2 - 4
8	1-8	2-8	1 - 2 - 8
4 - 8	1 - 4 - 8	2 - 4 - 8	1 - 2 - 4 - 8

Ainsi, dans aucun cas de figures, il ne peut y avoir uniquement deux erreurs indétectées par les bits de correction, sous l'hypothèse que ceux-ci sont exempts d'erreurs.