2001

Rallye

Épreuve Officielle
Solutions

Exercice n° 1 : (5 points)

Coup de pub

Soit une pyramide de base de côté contenant n balles ; sa base contient n^2 balles ;

cette pyramide contient donc $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$ balles.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169
nombre de balles	1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	506	650	819

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
n2	196	225	256	289	324	361	400	441	484	529	576	625	676
nombre de balles	1015	1240	1496	1785	2109	2470	2870	3311	3795	4324	4900	5525	6201

n	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
n2	729	784	841	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
nombre de balles	6930	7714	8555	9455	10416	11440	12529	13685	14910	16206	17575	**19019**	**20540**

La pyramide de base de côté 38 contient 19019 balles ; la pyramide de côté 39 contient 20540 balles.

Il est donc impossible de fabriquer une pyramide contenant <u>exactement</u> 20 000 balles.

Exercice n° 2 : (12 points)

Full contact

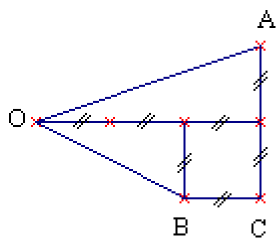
1) p peut prendre les valeurs 3, 4, 5 et 6.
2)

p n	3	4	5	6	Somme
2	8	0	0	0	8
3	8	12	6	1	27
4	8	24	24	8	64
5	8	36	54	27	125
k	8	12(k-2)	6(k-2)2	(k-2)3	k3

3) Les cubes qui ont 3 faces en contact avec d'autres faces sont les cubes " de sommets " du grand cube ; il y en a autant que de sommets, soit 8.
Les cubes qui ont 5 faces en contact avec d'autres faces sont les cubes " de faces " qui ne sont pas " des cubes de sommets ou d'arêtes " ; il y en a : nombre de faces $\times$ $(k-2)^2$.
Les cubes qui ont 6 faces en contact avec d'autres faces sont les cubes " du noyau" ; il y en a $(k-2)^3$.
4) Pour n = k, $8+12(k-2)+6(k-2)^2+(k-2)^3 = 8+12k-24+6(k^2-4k+4)+(k-2)(k^2-4k+4) = 8+12k-24+6k^2-24k+24+k^3-6k^2+12k-8 = k^3$

Exercice n° 3 : (5 points)

Si [AB] m'était tracé

	Dans le triangle ABC rectangle en C, d'après Pythagore, $AB^2 = AC^2+BC^2 = 2^2+1^2 = 5$. De même dans le triangle OEB rectangle en E, $OB^2=2^2+1^2=5$. D'où AB=OB et le triangle OAB est isocèle de sommet principal B. Dans le triangle OFA rectangle en F, on a $OA^2=3^2+1^2=10$. Donc $OB^2 + AB^2 = 10 = OA^2$. D'après la réciproque de Pythagore, le triangle OAB est rectangle en B. **Le triangle AOB est rectangle en B et isocèle donc l'angle AOB vaut 45°**

Exercice n° 4 : (8 points)

Tranches étranges

La part unité est déterminée par le disque central et son aire est 36π .

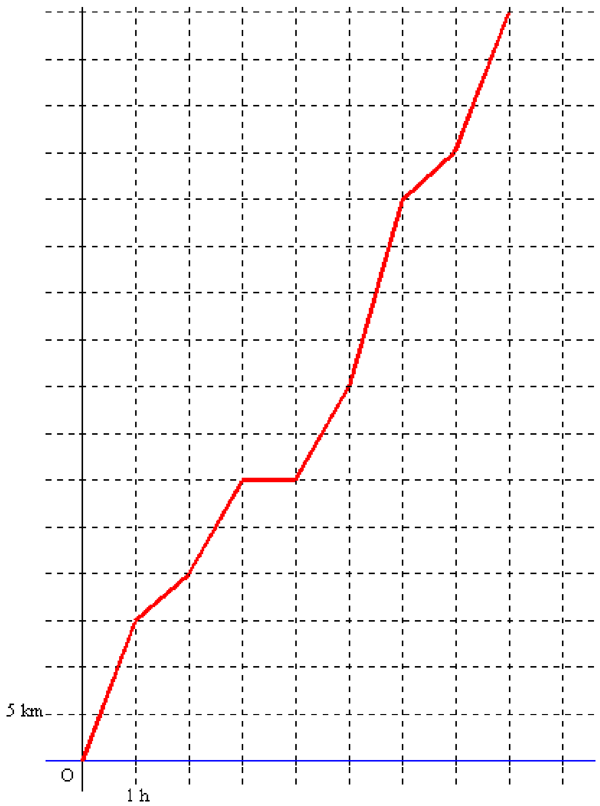
Aire de la $1^{\text{ère}}$ couronne à partir du centre : $144\pi - 36\pi = 108\pi$. Il faut donc 3 parts dans cette couronne.

Aire de la $2^{\text{ème}}$ couronne à partir du centre : $324\pi - 144\pi = 180\pi$. Il faut donc 5 parts dans cette couronne.

Il faut donc positionner 8 séparateurs.

Exercice n° 5 :(5 points)

Le Tram



1^{er} aller et retour : en 2h30, le tram parcourt 40 km ; sa vitesse moyenne est donc de 16 km/h.

-

$2^{ème}$ aller et retour : en 1 h 30, il parcourt 40 km ; sa vitesse moyenne est de 40/1,5 km/h soit à peu près 26,67 km/h.

Sur les deux aller et retour, il parcourt en 4 heures, 80 km ; sa vitesse moyenne est donc de 20 km/h.

Exercice n° 6 : (8 points)

Pile poil

VERSION pour les classes de secondes.

1) $OA = 2d-R$; $OI = d/2 + R$.

Dans le triangle OAC rectangle en C, d'après Pythagore, $OC^2 = (2d-R)^2 - d^2$.

Dans le triangle OCI rectangle en C, d'après Pythagore, $OC^2 = (d/2 + R.)^2 - (d/2)^2$.

D'où $(2d -R)^2 - d^2 = (d/2 + R.)^2 - (d/2)^2$ soit $4 d^2 - 4 d R+ R^2 - d^2 = d^2/4+ d R + R^2 - d^2/4$.

C'est à dire : $3 d^2 = 5 d R$ donc $R = 3/5 d$.

2) Pour d = 10 cm, OT = R = 6 cm et OA = AT – OT = 20 – 6= 14 cm.

VERSION pour les classes de troisièmes.

$OA = 20-R$; $OI = 5 + R$.

Dans le triangle OAC rectangle en C, d'après Pythagore, $OC^2 = (20-R)^2 - 10^2$.

Dans le triangle OCI rectangle en C, d'après Pythagore, $OC^2 = (5 + R)^2 - (5)^2$.

D'où $(20 -R)^2 - 100= (5 + R)^2 - 25$ soit $400 - 40R+ R^2 - 100 = 25+ 10R + R^2 - 25$.

C'est à dire : 50 R= 300 donc **R =6**.

OA = AT – OT = 20 – 6= 14.

Exercice n° 7 : (8 points)

Amnésie sur les bords du cher

Soit x, y et z les effectifs respectifs des troisièmes D, R et C.

1) Si y = 28, alors x ´ 13,7 + 28 ´ 12,3 = (x + 28) ´ 12,9 soit 0,8 x = 28 ´ 0,6 soit <u>x = 21</u>

28 ´ 12,3 + z ´ 10,5 = (28 + z) ´ 11,3 soit 0,8 z = 28 soit <u>z = 35</u>

2) x ´ 13,7 + y ´ 12,3 = (x + y) ´ 12,9 d'où 0,8 x = 0,6 y soit <u>x = 3/4 y</u>

y ´ 12,3 + z ´ 10,5 = (y + z) ´ 11,3 d'où 0,8 z = y soit <u>z = 5/4 y</u>. Le Principal a raison !

3) Alors la moyenne m des trois classes réunies est telle que :

(3/4y + y + 5/4y)´ m = 3/4y ´ 13,7 + y ´ 12,3 + 5/4y ´ 10,5

soit m = [(3/4) x 13,7 + 12,3 + (5/4) x10,5] / (3/4 + 1 + 5/4)   = <u>11,9</u>

Exercice n° 8 : (8 points)

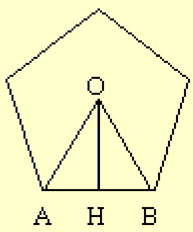
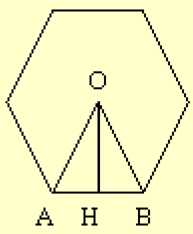
Ballon rond.com

Soit N le nombre de faces, p le nombre de pentagones et h le nombre d'hexagones composant le ballon.

Comptabilisons les arêtes communes à un hexagone et à un pentagone :

sur un hexagone, il y en a 3 soit en tout 3h ; sur un pentagone, il y en a 5 soit en tout 5p ; d'où <u>5p = 3h</u>.

On peut également remarquer que le nombre d'arêtes est 9 h/2 donc que <u>h est pair</u> et que le nombre de faces est N=8 h/5 d'où h =5 N/8 est pair donc <u>N est un multiple de 16</u> ce qui élimine les propositions 24 et 28.

<table>
<tr><td>
</td><td><u>Calcul de l'aire d'un pentagone de côté 4,5</u> : A_p = 5 x OH x AB /2
tan 36° = AH/OH d'où OH = AH/tan36° = AB/(2tan36°)
d'où A_p =5AB²/(4tan 36°) ≈ 34,84 cm²</td></tr>
<tr><td>
</td><td><u>Calcul de l'aire d'un hexagone de côté 4,5</u> : A_h = 6x OH x AB /2
tan 30° = AH/OH d'où OH =AH/tan30° = AB/(2tan30°)
d'où A_h = 3AB²/(2tan30°) ≈ 52,61 cm²</td></tr>
</table>